Prova 3 – Álgebra Linear – 2025/1

Instruções

1. **Justifique** todas as respostas.
2. **Em cima da carteira**, apenas **lápis, borracha, caneta e documento** com foto.
3. **Nenhum eletrônico** (celular, relógio, calculadora, ...) é **permitido** durante a prova.
4. A correção leva em conta a organização, clareza e corretude das respostas.
5. **Pode** responder usando **lápis** e em qualquer ordem.

Questões

1. (**10**) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz com determinante não nulo. Determine $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$.
   👉 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ logo

   $$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} cy + dw = 1 \\ ay + bw = 0 \end{cases}$$

   e vamos resolvê-los para x, z e para y, w. Primeiro para x, z. Do determinante não nulo podemos assumir que um dentre c, d é não nulo. Vamos supor sem perda de generalidade que $c \neq 0$. Da segunda equação $x = -\frac{d}{c}z$, substituindo na segunda $z = \frac{c}{cb-ad}$ (o denominador é $-\det(A)$) e $x = -\frac{d}{cb-ad} = \frac{d}{\det(A)}$. A solução para y, w é análoga $w = \frac{a}{ad-cb} = \frac{a}{\det(A)}$ e $y = -\frac{b}{\det(A)}$. Assim

   $$\begin{bmatrix} \frac{d}{cb-ad} & -\frac{b}{ad-cb} \\ \frac{c}{cb-ad} & \frac{a}{ad-cb} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \underbrace{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

2. (**40**) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
   (2.1) Calcule A^{500}.
   👉Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Vamos calcular A^{500} usando diagonalização. O polinômio característico de A é:

   $$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

   Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -2$. Para $\lambda = 6$, temos:

   $$(A - 6I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Para $\lambda = -2$, temos:

   $$(A + 2I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para a diagonalização tomamos (para P^{-1} usamos o exercício 1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então $A = PDP^{-1}$ e $A^{500} = PD^{500}P^{-1}$. Como $D^{500} = \begin{bmatrix} 6^{500} & 0 \\ 0 & (-2)^{500} \end{bmatrix}$ temos

$$A^{500} = PD^{500}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^{500} & 0 \\ 0 & 2^{500} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6^{500} + 2^{500} & 6^{500} - 2^{500} \\ 6^{500} - 2^{500} & 6^{500} + 2^{500} \end{bmatrix}.$$

(2.2) Determine B tal que $B^2 = A$.

👉 Como um autovalor é negativo A não possui raiz real.

3. (**30**) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $(1,-1)$, associado ao autovalor $1/2$, e $(1,1)$, associado ao autovalor 2. Calcule $T(5,1)$.

   👉 2 autovetores no $\mathbb{R}^2$ formam base (ordenada). O vetor $(5,1)$ pode ser escrito como combinação linear dos autovetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ da seguinte forma

$$(5,1) = \alpha(1,-1) + \beta(1,1)$$

   Ou seja $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$. Resolvendo obtemos $\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Logo $(5,1) = 2(1,-1) + 3(1,1)$.

   Aplicando T:

$$T(5,1) = T(2(1,-1) + 3(1,1)) = 2T(1,-1) + 3T(1,1) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1,-1) + 3 \cdot 2(1,1) = (7,5)$$

4.

4. (**30**) Considere $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (8x - 10y, 3x - 3y)$.

   (4.1) Determine os autovalores de T.

   👉 Podemos representar T por sua matriz associada $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$), em relação à base canônica

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores, resolvemos $\det(A - \lambda I) = 0$. Calculamos:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 3 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

(4.2) Determine os autoespaços dos autovalores de T

👉 $\lambda_1 = 3$: Resolvemos

$$(A - 3I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do sistema $5x - 10y = 0 \Rightarrow x = 2y$. O autoespaço é $\mathcal{E}_T(3) = \{\alpha(2,1)\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\lambda_2 = 2$: Resolvemos

$$(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Do sistema $6x - 10y = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}y$. O autoespaço é: $\mathcal{E}_T(2) = \{\alpha(5,3)\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(4.3) Mostre que T é diagonalizável exibindo (e justificando) uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

👉 A transformação T tem dois autovalores distintos $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$, com os respectivos autovetores $(2, 1)$ e $(5, 3)$ que são linearmente independentes (não são múltiplos um do outro). Logo forma uma base de autovetores para o $\mathbb{R}^2$. Logo, T é **diagonalizável**.